

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA II

TEMA 2.2 CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

CONTENIDOS

- 1. Definición de Cadena de Markov en Tiempo Continuo**
- 2. Comportamiento de transición**
- 3. Comportamiento estacionario**
- 4. Procesos de nacimiento y muerte**

1. Definición de Cadena de Markov en Tiempo Continuo

Consideremos un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ en tiempo continuo que toma valores enteros no negativos.

Un proceso estocástico en tiempo continuo $\{X(t), t \geq 0\}$ con espacio de estados S es una **cadena de Markov en tiempo continuo** si

$$\begin{aligned} P(X(t) = j \mid X(s) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_1) = i_1) \\ = P(X(t) = j \mid X(s) = i) \end{aligned}$$

donde $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq s \leq t$ es cualquier secuencia no decreciente de $n+1$ tiempos e $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ son $n+1$ estados cualesquiera del conjunto S .

La CMTC verifica la propiedad de Markov \rightarrow que dado el estado del proceso en un conjunto de tiempos anteriores al instante t , la distribución del proceso en el instante t depende sólo del instante de tiempo anterior más próximo a t .

Una cadena de Markov en tiempo continuo es **homogénea** si para cada $s \leq t$ y cada estado $i, j \in S$,

$$P(X(t) = j \mid X(s) = i) = P(X(t - s) = j \mid X(0) = i)$$

No todas las CMTC tienen que ser homogéneas, pero consideraremos únicamente las CMTC homogéneas.

Por homogeneidad, cuando el proceso entra en el estado i , la forma de evolucionar probabilísticamente desde este punto es la misma que si el proceso comenzase en el estado i en el instante 0. Denotamos al **tiempo de permanencia del proceso en el estado i** como T_i .

Proposición 1. El tiempo de permanencia en el estado i , T_i , se distribuye exponencialmente.

Demostración. Supongamos que el proceso comienza en el estado i . Para $s \geq 0$, $\{T_i > s\}$ es equivalente a $\{X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s\}$. De todo similar, para $s, t \geq 0$, $\{T_i > s+t\}$ es equivalente a $\{X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s+t\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 &P(T_i > s+t \mid T_i > s) \\
 &= P(X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s+t \mid X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s) \\
 &= P(X(u) = i \text{ para } s < u \leq s+t \mid X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s) \\
 &= P(X(u) = i \text{ para } s < u \leq s+t \mid X(s) = i) \\
 &= P(X(u) = i \text{ para } 0 < u \leq t \mid X(0) = i) = P(T_i > t),
 \end{aligned}$$

donde, la segunda igualdad se obtiene porque $P(A \cap B / A) = P(B / A)$, donde $A = \{X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s\}$ y $B = \{X(u) = i \text{ para } s \leq u \leq s+t\}$, la tercera igualdad se obtiene de la propiedad de Markov y la cuarta de la homogeneidad.

Por lo tanto, la distribución de T_i tiene la propiedad de pérdida de memoria, lo que implica que es exponencial.

Definición alternativa de CMTC. Un proceso estocástico en tiempo continuo $\{X(t), t \geq 0\}$ es una **cadena de Markov en tiempo continuo** si:

- Cuando entra en un estado i , el tiempo que permanece en él se distribuye exponencialmente con media $1/v_i$.
- Cuando abandona el estado i , entra en el estado j con probabilidad de transición p_{ij} , con $p_{ii} = 0$ y $\sum_j p_{ij} = 1$.

La matriz \mathbf{P} , formada por las probabilidades p_{ij} , es una matriz estocástica y, por lo tanto, la matriz de probabilidades de transición en un paso de una CMTD. Designaremos a esta CMTD como la **cadena de Markov encajada**.

Una CMTC se comporta como una CMTD, pero con intervalos de **tiempo de permanencia** en cada estado distribuidos exponencialmente e independientes.

Ejemplos: Proceso de Poisson de tasa 1, Proceso de Yule y Sistema de dos procesadores secuenciales.

2. Comportamiento de transición

En las CMTD se estudiaron las probabilidades de transición en n pasos, $p_{ij}^{(n)}$. El homólogo en CMTC es la **función de probabilidad de transición**

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i),$$

es decir, la probabilidad de que estando inicialmente en el estado i , después de t unidades de tiempo estemos en el estado j .

En las CMTC no podemos hablar de pasos. Para cada par de estados $i, j \in S$, la función de probabilidad de transición $p_{ij}(t)$ es una función continua de t . En general, es difícil o imposible determinar la función de probabilidad de transición aunque en casos sencillos se puede calcular. **Por ejemplo**, en los procesos de Poisson hemos visto que para $i \leq j$,

$$p_{ij}(t) = P(N(t) = j - i) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}.$$

Proposición 2 (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov). Sea la CMTC $\{X(t), t \geq 0\}$ con espacio de estados S . Entonces, para cada $s, t \geq 0$,

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s).$$

Demostración. La relación anterior se tiene de la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+s) &= P(X(t+s) = j \mid X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X(t+s) = j, X(t) = k \mid X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X(t+s) = j \mid X(t) = k, X(0) = i) P(X(t) = k \mid X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X(t+s) = j \mid X(t) = k) P(X(t) = k \mid X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj}(s) p_{ik}(t) \end{aligned}$$

Los valores fundamentales que especificaban una CMTD eran las probabilidades de transición p_{ij} . En tiempo continuo, son las **tasas instantáneas de transición** $q_{ij} = v_i p_{ij}$, que representan la tasa a la que se hacen transiciones de i a j .

Observemos que determinan la cadena, puesto que

$$v_i = \sum_j v_i p_{ij} = \sum_j q_{ij},$$

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}.$$

Objetivo: proporcionar un **stma. de ecuac. diferenciales** para calcular $p_{ij}(t)$.

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t) p_{kj}(h) - p_{ij}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k \neq j} p_{ik}(t) p_{kj}(h) - p_{ij}(t)(1 - p_{jj}(h))}{h} \\ &= \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{kj}(h)}{h} - p_{ij}(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - p_{jj}(h)}{h}. \end{aligned}$$

Después de operar obtenemos que

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{kj}(h)}{h} - p_{ij}(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - p_{jj}(h)}{h} \\ &= \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t) q_{kj} - p_{ij}(t) v_j. \end{aligned}$$

Teorema 1 (Ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogorov). Bajo condiciones adecuadas, $\forall i, j, t \geq 0$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t) q_{kj} - p_{ij}(t) v_j.$$

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Proceso de Poisson de tasa λ)

Como $q_{i,i+1} = \lambda$ y $q_{ij} = 0, \forall j \neq i+1$, las ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogorov son

$$p'_{ij}(t) = p_{i,j-1}(t) \lambda - p_{ij}(t) \lambda.$$

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Proceso de Yule) Como $q_{i,i+1} = i\lambda$ y $q_{ij} = 0, \forall j \neq i+1$, las ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogorov son

$$p'_{ij}(t) = p_{i,j-1}(t) (j-1) \lambda - p_{ij}(t) j \lambda.$$

Ejemplo (Continuación del ejemplo de sistema con dos procesadores secuenciales)

Las ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogorov en **forma matricial**:

$$\mathbf{P}_0(t) = \mathbf{G} \mathbf{P}(t) ,$$

donde $\mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{P}_0(t)$ las matrices formadas por los elementos $p_{ij}(t)$ y $p'_{ij}(t)$, respectivamente, y \mathbf{G} (**generador infinitesimal o generador**) en la que los elementos (\mathbf{i}, \mathbf{i}) tienen valor $-v_i$ y los elementos (i, j) , con $i \neq j$, el valor q_{ij} .

A la hora de obtener las ecuaciones diferenciales, si hubiéramos condicionado a $X(t)$ en lugar de a $X(s)$, habríamos obtenido otro conjunto de ecuaciones diferenciales llamadas **ecuaciones diferenciales hacia adelante de Kolmogorov**, las cuales escritas en forma matricial son

$$\mathbf{P}_0(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{G}.$$

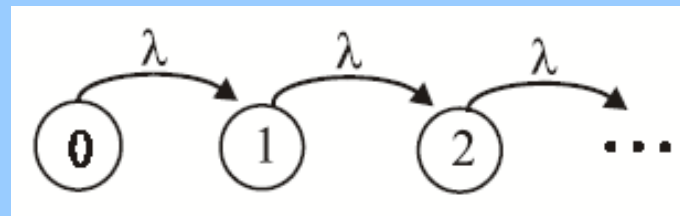
Para ambas ecuaciones, tenemos la condición límite $\mathbf{P}(0)=\mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

Las ecuaciones hacia atrás y hacia adelante, con la anterior condición límite, tienen la misma solución:

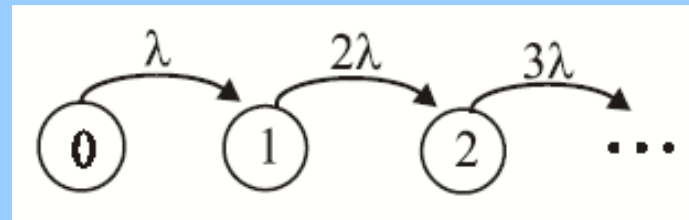
$$\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{G}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{G})^n}{n!} = \mathbf{I} + t\mathbf{G} + \frac{(t\mathbf{G})^2}{2!} + \frac{(t\mathbf{G})^3}{3!} + \dots$$

Las CMTC se pueden representar mediante un **diagrama de transición**: grafo en el que los nodos representan estados, un arco entre i y j describe la posibilidad de transición de i a j y q_{ij} se representa sobre el arco correspondiente.

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Proceso de Poisson de tasa λ)



Ejemplo (Continuación del ejemplo de Proceso de Yule)



Ejemplo (Continuación del ejemplo de Sistema con dos procesadores secuenciales)

3. Comportamiento estacionario

Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ una CMTC con matriz de funciones de probabilidad de transición $\mathbf{P}(t)$. Un vector $\boldsymbol{\pi}$, con $\pi_i \geq 0 \forall i$ y $\sum_i \pi_i = 1$, se dice que es una distribución estacionaria si $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t)$, $\forall t \geq 0$.

Veamos cómo utilizar el generador \mathbf{G} para determinar la distribución estacionaria:

$$\begin{aligned} \pi \text{ es estacionaria} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t), \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{G})^n}{n!}, \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \boldsymbol{\pi}\mathbf{G}^n, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{G}^n, \forall n \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{G}. \end{aligned}$$

Así, la condición $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t)$, $\forall t \geq 0$, la cual es muy difícil de resolver, se reduce a la mucho más simple $\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{G}$. Por lo tanto, la distribución estacionaria $\boldsymbol{\pi}$, si existe, se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{G} \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -v_j \pi_j + \sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_j \pi_j = \sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

Lado izquierdo $\rightarrow \pi_j$ es la proporción de tiempo a largo plazo que el proceso está en el estado j , mientras que v_j es la tasa de abandono del estado j cuando el proceso está en él. Así, $v_j \pi_j$ es interpretado como la **tasa a largo plazo de dejar el estado j** .

Lado derecho $\rightarrow q_{ij}$ es la tasa de ir al estado j cuando el proceso está en el estado i , así $q_{ij} \pi_i$ se interpreta como la tasa a largo plazo de ir del estado i al j .

Luego, $\sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i$ representa la **tasa a largo plazo de ir al estado j** .

Por lo tanto, la tasa a largo plazo de salida del estado j coincide con la tasa de entrada en el estado j , y por esta razón las ecuaciones $0 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{G}$ se denominan **ecuaciones de equilibrio global** o simplemente **ecuaciones de equilibrio**.

Teorema 2. En una cadena de Markov en tiempo continuo, si existe una distribución estacionaria π , entonces es única y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \quad \forall i.$$

Ejemplo (Continuación del ejemplo de proceso de Poisson de tasa λ) Las ecuaciones de equilibrio para un proceso de Poisson de tasa λ son

$$\begin{aligned} \lambda \pi_j &= \lambda \pi_{j-1}, \quad \forall j \\ \sum_i \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

que no tienen solución.

Ejemplo (Continuación del ejemplo de proceso de Yule) Las ecuaciones de equilibrio para un proceso de Yule de tasa λ son

$$\begin{aligned} j \lambda \pi_j &= (j-1) \lambda \pi_{j-1}, \quad \forall j \\ \sum_i \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

que no tienen solución.

4. Procesos de Nacimiento y Muerte

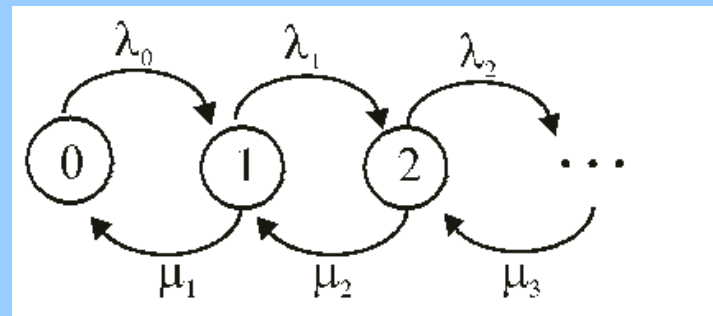
Los **procesos de nacimiento y muerte**, básicamente, describen sistemas cuyo estado, en cada instante, representa el número de individuos en el mismo. Cuando éste es n , se producen llegadas con tasa exponencial λ_n y salidas con tasa exponencial μ_n , de forma independiente.

Un **proceso de nacimiento y muerte** con tasas de llegada (nacimiento) $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ y tasas de salida (muerte) $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una CMTC con espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$, tasas de permanencia $v_0 = \lambda_0$, $v_i = \lambda_i + \mu_i$, $i > 0$ y probabilidades de transición

$$\begin{aligned} p_{01} &= 1, & p_{0i} &= 0, \text{ para } i \neq 1, \\ p_{i,i+1} &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, & p_{i,i-1} &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \\ p_{ij} &= 0, \text{ } j \neq i+1, i-1, \text{ para } i \neq 0. \end{aligned}$$

El **proceso de Poisson** es un proceso de nacimiento y muerte con $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = 0$, $\forall n$. El **proceso de Yule** es también un proceso de nacimiento y muerte con $\lambda_n = n\lambda$ y $\mu_n = 0$, $\forall n$.

El **diagrama de transición** de un proceso de nacimiento y muerte es



Sus **tasas de transición** son

$$q_{01} = \lambda_0, \quad q_{i,i+1} = \lambda_i, \quad q_{i,i-1} = \mu_i,$$

y el resto 0, con lo que el sistema de **ecuaciones diferenciales de Kolmogorov** es

$$\begin{aligned} p'_{i0}(t) &= p_{i1}(t) \mu_1 - p_{i0}(t) \lambda_0 \\ p'_{ij}(t) &= p_{i,j+1}(t) \mu_{j+1} + p_{i,j-1}(t) \lambda_{j-1} - p_{ij}(t) (\lambda_j + \mu_j) \end{aligned}$$

Resolverlo es complicado, pero conducen de forma sencilla al **sistema en equilibrio**

$$\begin{aligned}\lambda_0 \pi_0 &= \mu_1 \pi_1 \\ (\lambda_j + \mu_j) \pi_j &= \mu_{j+1} \pi_{j+1} + \lambda_{j-1} \pi_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \\ \sum_j \pi_j &= 1\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}\lambda_0 \pi_0 &= \mu_1 \pi_1 \\ (\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 &= \mu_2 \pi_2 + \lambda_0 \pi_0 \\ (\lambda_2 + \mu_2) \pi_2 &= \mu_3 \pi_3 + \lambda_1 \pi_1 \\ \dots & \\ (\lambda_n + \mu_n) \pi_n &= \mu_{n+1} \pi_{n+1} + \lambda_{n-1} \pi_{n-1} \\ \dots & \\ \sum_n \pi_n &= 1\end{aligned}$$

descrito mediante el **equilibrio de tasas de salida y de entrada en cada estado.**

La resolución del sistema es estándar, sumando las dos primeras, las tres primeras, ecuaciones pasamos al sistema

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1$$

$$\lambda_1 \pi_1 = \mu_2 \pi_2$$

$$\lambda_2 \pi_2 = \mu_3 \pi_3$$

...

$$\lambda_n \pi_n = \mu_{n+1} \pi_{n+1}$$

...

$$\sum_n \pi_n = 1$$

y despejando
cada π_i en
función de π_0

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \pi_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} \pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \pi_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} \pi_0$$

...

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \pi_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1} \pi_0$$

...

$$\sum_n \pi_n = 1$$

Sustituimos los valores de π_i en la última ecuación y despejamos π_0 , obteniendo

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1}}$$

con lo cual,

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1} \right)}.$$

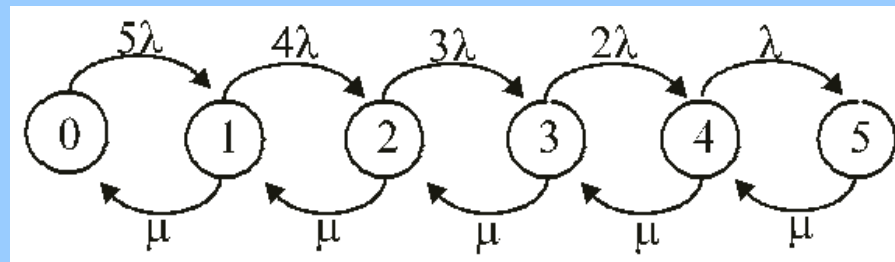
Claramente, una condición necesaria para que exista la distribución estacionaria es que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1} < \infty.$$

comprobándose que esta condición es también suficiente para la existencia de la distribución.

Ejemplo. En una empresa hay 5 servidores y un técnico que los mantiene. Supongamos que el tiempo que tardan en fallar sigue una distribución exponencial con tasa 1 fallo cada 10 horas. La duración de la reparación es exponencial con media 2 horas. ¿Cuál es el número medio de servidores con fallos? y ¿qué proporción de tiempo a largo plazo está cada servidor en uso?

Diremos que el sistema está en el estado n si hay n servidores con fallos. Entonces, el problema puede ser modelizado como un proceso de nacimiento y muerte con diagrama de transición



donde $\lambda=1/10$, $\mu=1/2$ y las tasas son

$$\lambda_n = \begin{cases} (5 - n) \lambda, & \text{si } n \leq 5 \\ 0, & \text{si } n > 5 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{si } 1 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{si } n > 5 \end{cases}$$

Las ecuaciones en equilibrio son

$$\left\{ \begin{array}{l} 5\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ (4\lambda + \mu)\pi_1 = 5\lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\ (3\lambda + \mu)\pi_2 = 4\lambda\pi_1 + \mu\pi_3 \\ (2\lambda + \mu)\pi_3 = 3\lambda\pi_2 + \mu\pi_4 \\ (\lambda + \mu)\pi_4 = 2\lambda\pi_3 + \mu\pi_5 \\ \mu\pi_5 = \lambda\pi_4 \\ \sum_{i=0}^5 \pi_i = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ 4\lambda\pi_1 = \mu\pi_2 \\ 3\lambda\pi_2 = \mu\pi_3 \\ 2\lambda\pi_3 = \mu\pi_4 \\ \lambda\pi_4 = \mu\pi_5 \\ \sum_{i=0}^5 \pi_i = 1 \end{array} \right.$$

y sustituyendo por su valor se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} 5/10\pi_0 = 1/2\pi_1 \\ 4/10\pi_1 = 1/2\pi_2 \\ 3/10\pi_2 = 1/2\pi_3 \\ 2/10\pi_3 = 1/2\pi_4 \\ 1/10\pi_4 = 1/2\pi_5 \\ \sum_{i=0}^5 \pi_i = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = 0.02734 \\ \pi_1 = 0.02734 \\ \pi_2 = 0.03416 \\ \pi_3 = 0.05694 \\ \pi_4 = 0.14237 \\ \pi_5 = 0.71185 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, el número medio de servidores con fallos es $\sum_{n=0}^5 n\pi_n = 4.395$ y la proporción de tiempo a largo plazo que está cada servidor en uso es (teorema de la probabilidad total).

$$\begin{aligned} P(\text{servidor sin fallos}) &= \sum_{n=0}^5 P(\text{servidor sin fallos} \mid n \text{ servidores con fallos}) \pi_n \\ &= \sum_{n=0}^5 \frac{5-n}{5} \pi_n = 0.121 . \end{aligned}$$

Consideremos un proceso de nacimiento y muerte general con tasas $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$. **Tiempo que tarda el sistema en pasar del estado i al $i + 1$** , es decir, T_i , $i \geq 0$. Calculemos $E(T_i)$ de forma recursiva.

En primer lugar, como $T_0 \sim \text{Exp}(\lambda_0)$ se tiene que $E(T_0) = 1/\lambda_0$. Para $i > 0$, condicionamos a que la primera transición sea a $i-1$ o a $i+1$. Para ello, definimos

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{si la primera transición es de } i \text{ a } i+1 \\ 0, & \text{si la primera transición es de } i \text{ a } i-1 \end{cases}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} E(T_i | I_i = 1) &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \\ E(T_i | I_i = 0) &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + E(T_{i-1}) + E(T_i) \end{aligned}$$

pues, independientemente de que la primera transición sea por nacimiento o muerte, se produce con tasa $1/(\lambda_i + \mu_i)$.

Luego,

$$\begin{aligned} E(T_i) &= E(E(T_i | I_i)) = E(T_i | I_i = 1) P(I_i = 1) + E(T_i | I_i = 0) P(I_i = 0) \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} + \left(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + E(T_{i-1}) + E(T_i) \right) \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} (E(T_{i-1}) + E(T_i)), \end{aligned}$$

de donde

$$E(T_i) = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} E(T_{i-1}).$$

Así, si deseamos calcular el tiempo esperado para ir del estado i al j , con $i < j$, tenemos que éste vale:

$$E(T_i) + E(T_{i+1}) + \cdots + E(T_{j-1}).$$